PRESENTACIÓN

¿Cómo surgió el álgebra? Lo que vino primero fueron los problemas y los métodos. Sólo más adelante fue inventada la notación simbólica lo que ahora consideramos que es la esencia del tema.

Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área o volumen, sin que tuvieran relación con problemas de medida.

Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

1/4 anchura + longitud = 7 manos

longitud + anchura = 10 manos

Para resolverlo comienzan asignando el valor 5 a una mano y observaban que la solución podía ser: anchura = 20, longitud = 30. Para comprobarlo utilizaban un método parecido al de eliminación. En nuestra notación, sería:

$$y + 4x = 28$$

$$y + x = 10$$

Restando la segunda de la primera, se obtiene $3x = 18$, es decir: $x = 6$ e $y = 4$.

También resolvían sistemas de ecuaciones, donde alguna de ellas era cuadrática.

Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero uti1izando métodos geométricos. Thymaridas (400 a. de C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

Esta unidad te permitirá una mayor comprensión de los métodos para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, para que puedas continuar con el estudio de otros tipos de sistemas de ecuaciones en tus estudios posteriores.

UNIDAD 4: **Sistemas de Ecuaciones Lineales.**

Propósitos de la unidad:

Profundizar en la noción de sistema de ecuaciones lineales, y al mismo tiempo en la ecuación lineal con dos incógnitas. Trabajar el método gráfico y los diferentes métodos algebraicos de solución. Analizar los diversos casos de sistemas dependiendo del número de soluciones.

4.1 Problemas que llevan a plantear sistemas de ecuaciones lineales y no lineales (casos sencillos), su solución por medio de una tabla de valores y gráficamente.

Aprendizajes:

El alumno:

- ✓ *Utiliza tablas de valores para explorar aquellos que satisfacen las condiciones dadas.*
- ✓ *Distingue, por el contexto del problema, si se trata de una variable discreta o una continua, y lo tomará en cuenta al graficar el sistema y obtener su solución.*

Muchos de los problemas que se nos presentan se pueden resolver usando dos variables, con esta estrategia muchas veces se facilita su planteamiento, veamos algunos ejemplo cuya solución es por medio de una tabla de valores o usando una gráfica.

Ejemplo 1) En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase? (Recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas).

Solución:

Haciendo una tabla donde se hagan cálculos intuitivos tomando en cuenta:

1ª) Que la suma de cabezas de mosca y de araña es 42.

2ª) Que el número de patas de mosca más el número de patas de araña es 276, es decir: patas mosca + patas de araña = 276

Por ejemplo, un cálculo al tanteo podría ser:

Cabezas mosca	5	10	20	25	30
Patas de mosca	30	60	120	150	180
Cabezas araña	37	32	22	17	12
Patas de araña	296	256	176	136	96
Suma de patas	326	316	296	286	276

42 cabezas

276 patas

Respuesta: Había 30 moscas y 12 arañas.

El problema podría ser resuelto con más o menos cálculos, depende de tu astucia, ya que también se puede usar una hoja de cálculo como EXCEL.

De cualquier forma este es un procedimiento que lleva tiempo y paciencia.

La forma correcta es tomar en cuenta la 1ª condición:

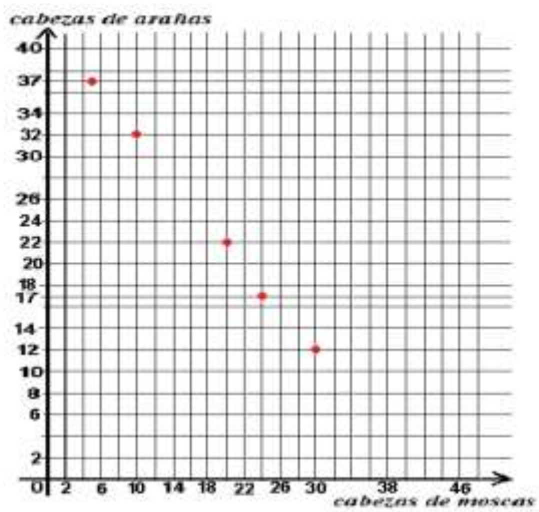
Cabezas mosca	5	10	20	25	30
Cabezas araña	37	32	22	17	12
Total de cabezas	42	42	42	42	42

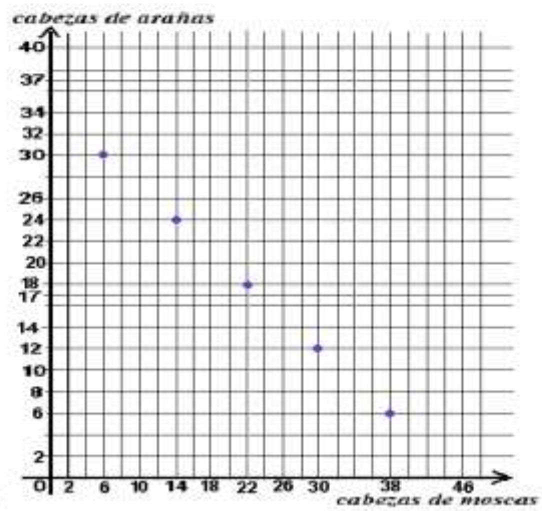
Después hacemos otra tabla con la 2ª condición:

Patas de mosca = 6(cabezas de mosca)	6(6) = 36	6(14) = 84	6(22) = 132	6(30) = 180	6(38) = 228
Patas de araña = 8(cabezas de araña)	8(30) = 240	8(24)=192	8(18) = 144	8(12) = 96	8(6) = 48
Total de patas	276	276	276	276	276

La solución es cuando el mismo número de cabezas de moscas y arañas aparecen en ambas tablas, es decir, cabezas de moscas 30 y de araña 12.
SUGERENCIA: Puedes usar una hoja de cálculos para una tabulación mayor.

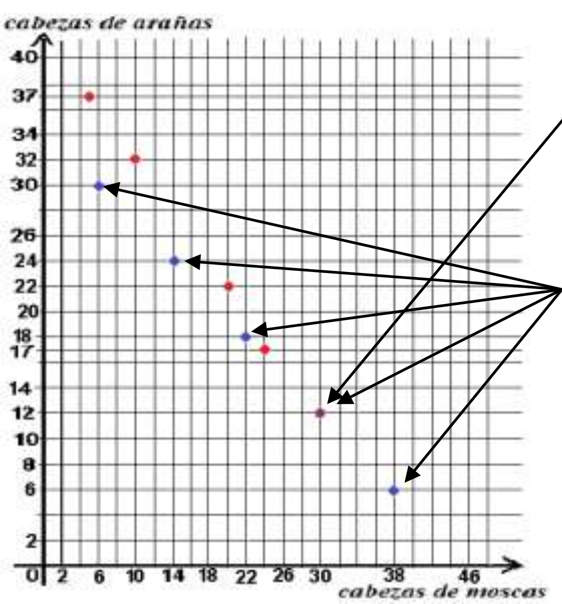
Ahora veamos sus gráficas por separado, utilizando los valores de la tabla:





moscas + arañas = 42 Cada punto representa: 6(moscas) + 8(arañas) = 276

En estas gráficas no se aprecia la solución del problema porque se trazan por separado, para visualizar la solución gráfica del problema, se toma en cuenta las condiciones en un solo plano. Y se vería así:



Los puntos que se traslapa es cuando: cabezas de mosca = 30 y cabezas de araña = 12 es la solución al problema.

Recuerda que estos puntos alineados tienen la propiedad de:
6(Cabezas de mosca) + 8(cabezas de araña) = 276, como está indicado en la segunda tabla.

Observación: En estas gráficas NO se debe unir los puntos con una recta porque tanto las moscas como las arañas deben ser entidades enteras, a este tipo de gráficas se les llama ***discontinuas***.

Ejemplo 2) En la granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?

Solución:

Haciendo una tabla donde se hagan cálculos intuitivos tomando en cuenta:

1º) El total de botellas es 120.

2º) Se debe de embasar exactamente 300 litros, es decir:

2(# botellas de 2 l) + 5(# botellas de 5 l) = 300

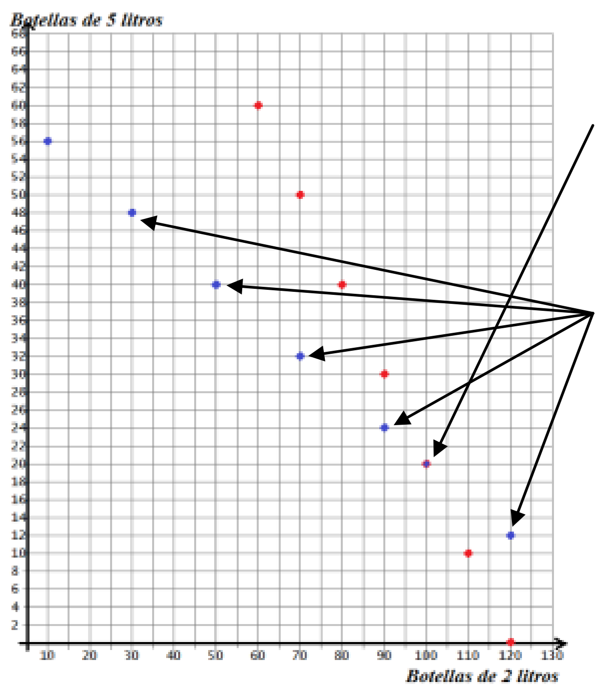
Botellas de 2 litros	10	50	60	70	80	90	100	110	120
Botellas de 5 litros	110	70	60	50	40	30	20	10	0
Total de botellas	120	120	120	120	120	120	120	120	120

Litros en botellas de 2 litros = 2(# botellas)	2(10) = 20	2(30) = 60	2(50) = 100	2(70) = 140	2(90) = 180	2(100) = 200	2(120) = 240
Litros en botellas de 5 litros = 5(# botellas)	5(56) = 280	5(48) = 240	5(40) = 200	5(32) = 160	5(24) = 120	5(20) = 100	5(12) = 60
Total de litros	300	300	300	300	300	300	300

La solución es cuando el mismo número de botellas de 2 litros y de 5 litros aparecen en ambas tablas, es decir, se utilizaron 100 botellas de 2 litros y 20 de 5 litros.

El problema podría ser resuelto con más o menos cálculos, depende de tu astucia, ya que también se puede usar una hoja de cálculo como EXCEL.

Para visualizar la solución gráfica del problema, en un solo plano se trazan los valores de ambas tablas. Y se vería así:



Los puntos que se traslapan es cuando: # de botellas de 2 l = 100 y # de botellas de 5 l = 20 es la solución al problema.

Recuerda que estos puntos alineados tienen la propiedad de:

2(# de botellas de 2 l) + 5(# de botellas de 5 l) = 300

Como está indicado en la segunda tabla.

Observación: De igual forma que el ejemplo anterior, los puntos de estas gráficas NO se deben de unir, porque las botellas deben ser objetos enteros, estas gráficas son ***discontinuas***.

Usar este método para resolver problemas es muy laborioso, en esta unidad aprenderemos algunos métodos algebraicos que nos facilitarán este procedimiento. Para esto, primero tienes que repasar y aprender los conceptos que a continuación se describen.

Ejercicio 4.1

Resuelve cada uno de los siguientes problemas planteando una tabla de valores y trazar su gráfica donde visualices la solución.

1) Al preguntar en mi familia cuántos hijos son, yo respondo que tengo tantas hermanas como hermanos y mi hermana mayor responde que tiene doble número de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos hijos e hijas somos?

2) Un crucero tiene habitaciones dobles (2 camas) y sencillas (1 cama). En total tiene 47 habitaciones y 79 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

3) Hace 5 años la edad de mi padre era el triple de la de mi hermano y dentro de 5 años sólo será el duplo. ¿Cuáles son las edades de mi padre y de mi hermano?

4) Un reloj señala las tres en punto. A partir de esa hora, ¿a qué hora coincidirán las manecillas por primera vez?

5) Un ama de casa compra en un supermercado 6 litros de leche y 3 kilos de azúcar, por lo que paga $138. Recordó que tenía que hacer caramelos, vuelve al día siguiente y compra 1 litro de leche y 10 Kilos de azúcar por lo que paga $194. No se fija en el precio y plantea el problema a su hijo de 15 años. Este después de calcular lo que su madre hubiera pagado por 6 litros de leche y 60 kilos de azúcar, halla el precio de cada artículo. ¿Podrías llegar tú a resolver el problema?

4.2 Gráfica de la ecuación lineal en dos variables. Pendiente, ordenada y abscisa al origen.

Aprendizajes:
El alumno:

- ✓ *Recuerda que una ecuación lineal en dos variables tiene por gráfica una línea recta y viceversa.*
- ✓ *Identifica a partir de los parámetros de una expresión lineal dada, la ordenada y la abscisa al origen.*
- ✓ *Verifica que una pareja ordenada de números es solución de una ecuación lineal en dos variables.*

Recuerda lo que aprendiste en la unidad 2 de esta guía, relativo a las funciones lineales, en forma resumida siempre debes tener presente que:

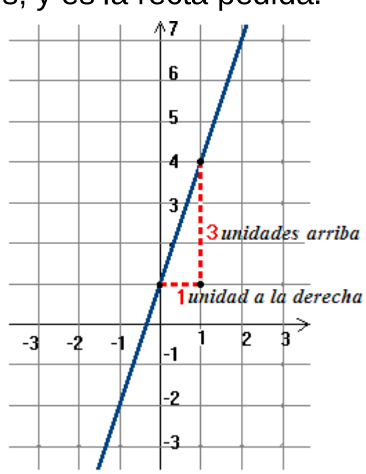
Toda expresión de la forma $y = ax + b$ con $a \neq 0$ se le llama FUNCIÓN LINEAL, y su gráfica es una **línea recta**. Y viceversa, toda línea recta representa a una FUNCIÓN LINEAL.
Al número o parámetro ***b*** se le llama ***ordenada al origen***.
Y el número o parámetro ***a*** es la ***pendiente de la recta***.

Ejemplo 1) Analiza los parámetros de la Función Lineal $y = 3x + 1$, y trazar su gráfica.

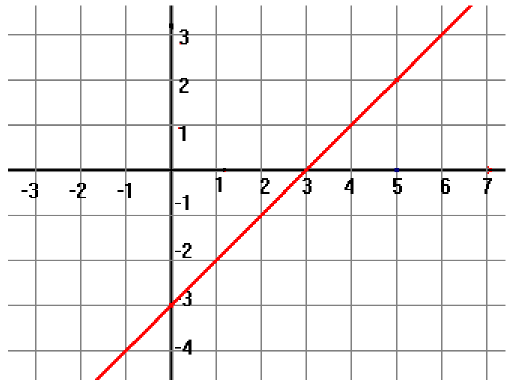
Solución:

El número 1 es la *ordenada al origen*, es decir, por donde la recta corta al eje Y.
El número $3 = \frac{3}{1}$ es la *pendiente* de la recta, es decir, representa su inclinación.
Como es un número positivo la recta se inclina a la derecha.
Su gráfica se traza de la siguiente forma:

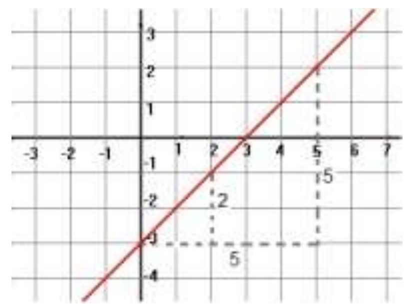
Marcamos sobre el eje Y un punto en 1, avanzamos hacia la derecha 1 unidad y hacia arriba 3 unidades, y marcamos el segundo punto. Con una regla se unen los puntos, y es la recta pedida.



Ejemplo 2) Dada la siguiente línea recta, encuentra su ecuación.



Solución:
Como la recta corta al eje Y en – 3, entonces el parámetro $b = -3$.
La pendiente a se encuentra fijándonos en los avances a partir de – 3, se puede hacer diferentes avances.



Por ejemplo, de – 3 hacia la derecha avanzamos 2 unidades y hacia arriba otras 2 para llegar de nuevo a la recta, es decir $a = \frac{2}{2} = 1$.
O podría ser, de – 3 hacia la derecha avanzamos 5 unidades y hacia arriba otras 5 para llegar de nuevo a la recta, es decir $a = \frac{5}{5} = 1$.
En cualquier caso la pendiente es $a = 1$.

Asi la ecuación lineal es $y = x - 3$, que también se representa como $x - y = 3$.

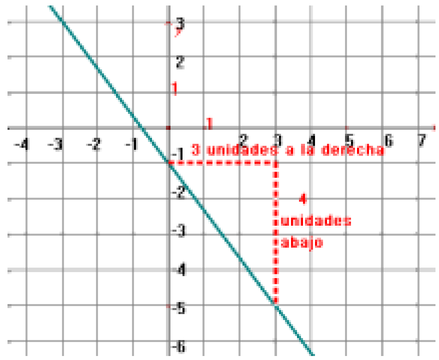
Ejemplo 3) Analiza los parámetros de la Función Lineal $4x + 3y = -3$, y trazar su gráfica.

Solución:
Para encontrar sus parámetros y graficarla, escribimos la ecuación en la forma:
$y = ax + b$, para esto se despeja la y, y se tiene: $y = -\frac{4}{3}x - 1$

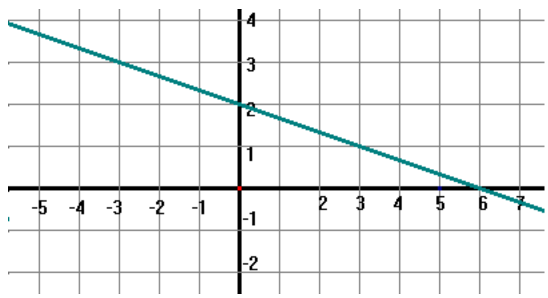
El número – 1 es la *ordenada al origen*, es decir, por donde la recta corta al eje Y.
El número $-\frac{4}{3}$ es la *pendiente* de la recta, es decir, representa su inclinación. Como es un número negativo la recta se inclina hacia la izquierda.

Conociendo sus parámetros su gráfica se traza de la siguiente forma:

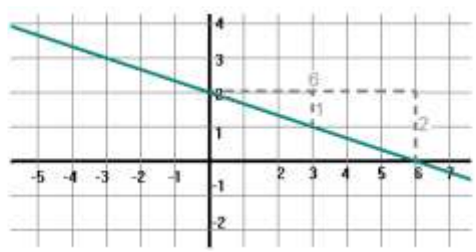
Marcamos sobre el eje Y un punto en – 1, avanzamos hacia la derecha 3 unidades y hacia abajo (por el signo negativo) 4 unidades, y marcamos el segundo punto. Con una regla se unen los puntos, y es la recta pedida.



Ejemplo 4) Dada la siguiente línea recta, encuentra su ecuación.



Solución:
Como la recta corta al eje Y en 2, entonces el parámetro $b = 2$.
La pendiente a se encuentra fijándonos en los avances a partir de 2, una forma de avanzar podría ser:



Desde 2 hacia la derecha avanzamos 3 unidades y hacia abajo 1 unidad para llegar de nuevo a la recta, es decir $a = -\frac{1}{3}$.

O también podría ser, a partir de 2 hacia la derecha avanzamos 6 unidades y hacia abajo 2 unidades para llegar de nuevo a la recta, es decir $a = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$.

En cualquier caso la pendiente $a = -\frac{1}{3}$.

Entonces, la ecuación lineal es $y = -\frac{1}{3}x + 2$, que es lo mismo que $x - 3y = 6$.

Ejemplo 5) ¿El punto (2 , –1) es solución o satisface la ecuación $x - 3y = 6$?
Solución:
Se sustituye en la ecuación los valores del punto dado, haciendo $x = 2$ y $y = -1$, y si queda una igualdad verdadera el punto es solución. Si queda una igualdad falsa entonces NO es solución o No satisface la ecuación dada. Veámoslo:

Sustituyendo en $x - 3y = 6$ tenemos $2 - 3(-1) = 6$

$$2 + 3 = 6$$

$$5 = 6$$ lo cual es FALSO.

El punto (2 , –1) NO es solución de $x - 3y = 6$, también se puede afirmar que el punto NO pertenece o NO está sobre la recta.

Ejemplo 6) ¿El punto (– 3 , 5) es solución o satisface la ecuación $6x + 5y - 7 = 0$?

Solución:

Sustituyendo en la ecuación los valores del punto dado, haciendo $x = -3$ y $y = 5$ tenemos:

$$6(-3) + 5(5) - 7 = 0$$

$$-18 + 25 - 7 = 0$$

$$25 - 25 = 0$$

$$0 = 0$$ es VERDADERO.

El punto (– 3 , 5) SI es solución o satisface la ecuación $6x + 5y - 7 = 0$, es decir, el punto pertenece o está sobre la recta.

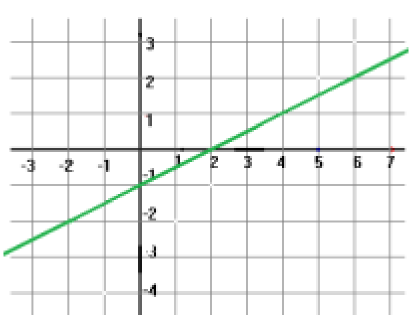
Ejercicios 4.2

I. Trazar las gráficas de las siguientes funciones lineales.

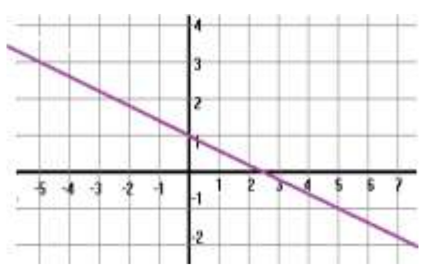
1) $y = \frac{3}{4}x - 2$ 2) $2x + 5y - 8 = 0$ 3) $7x - 3y = 6$

II. Dadas las siguientes gráficas de funciones Lineales, escribe su ecuación.

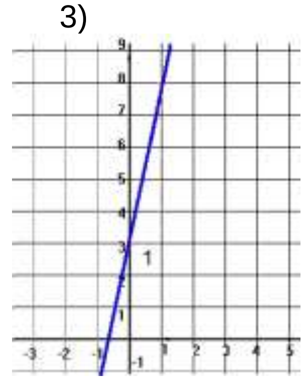
1)



2)



3)



III. Para cada caso, decir si el punto dado es solución o no está sobre la recta dada.

1) (3 , 9), $y = 5x - 2$ 2) (– 1 , 2), $2x + 7y - 12 = 0$

3) (4 , – 2), $3x - y = 14$ 4) (– 3 , – 5), $x = 2y - 7$

4.3 Gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2, en un mismo plano. Interpretación geométrica de la solución.

Aprendizajes:
El alumno:

- ✓ *Identifica el punto de intersección de dos líneas rectas como la solución del sistema de ecuaciones lineales asociado a dichas rectas.*
- ✓ *Obtiene de manera gráfica la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.*
- ✓ *Aprecia limitaciones del método gráfico para obtener la solución de un sistema de ecuaciones.*

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, también llamado sistema de ecuaciones lineales de 2×2, es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son números reales.

Resolver el sistema será encontrar valores para las incógnitas x e y que verifiquen las dos ecuaciones de manera simultánea.

Hay distintos métodos para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones, uno de ellos es el **Método Gráfico**.

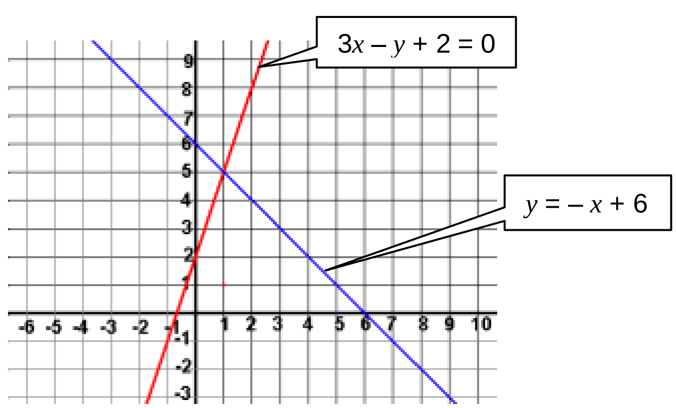
Sabemos que la representación gráfica de una ecuación lineal es una recta, podemos trazar cada gráfica en un mismo plano cartesiano y la solución será el par de coordenadas que corresponden al punto donde se cortan las dos rectas, ya que este punto satisface cada ecuación.

Ejemplo 1) Usando el Método Gráfico, encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$3x - y + 2 = 0$$
$$y = -x + 6$$

Solución:

En cada ecuación se despeja a y, y se traza cada recta en un mismo plano:



Donde se cortan las dos rectas es la solución del sistema, en este caso es fácil ver que la solución es el punto (1 , 5).

COMPROBACIÓN:
Se sustituye $x = 1$ y $y = 5$ en ambas ecuaciones y se tiene:

En $3x - y = -2$
$3(1) - 5 = -2$
$3 - 5 = -2$
$-2 = -2$ ✓

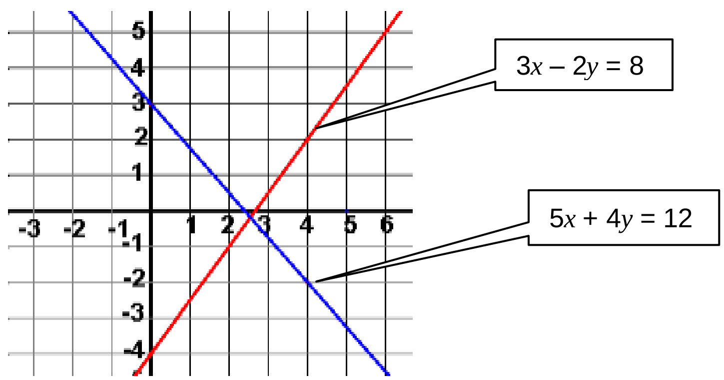
En $x + y = 6$
$1 + 5 = 6$
$6 = 6$ ✓

Satisface ambas ecuaciones.

Ejemplo 2) Usando el Método Gráfico, encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$3x - 2y = 8$$
$$5x + 4y = 12.$$

Solución:
Despejando a y de cada ecuación, se traza cada recta en un mismo plano:



Donde se cortan las dos rectas es la solución del sistema, en este caso NO es fácil ver las coordenadas exactas de dicho punto, pero se puede dar una aproximación que no sería la solución exacta del sistema, como te das cuenta este método tiene sus limitaciones.

Por tal razón, es conveniente usar otro método de solución que veremos en el punto 4.7 que está más adelante.

Ejercicio 4.3

Usando el Método Gráfico, encontrar la solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

1) $x - 2y = 4$
$x + y = 1$

2) $3 - y = 2x$
$y = x + 6$

3) $x = 10 - 5y$
$5x - 3y = 3$

4) $4x - 3y + 12 = 0$
$3y + 2x + 6 = 0$

4.4 Sistemas Compatibles (consistentes) e Incompatibles (inconsistentes).

Aprendizaje:
El alumno identifica a partir de la gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2 , si es compatible o incompatible.

Dependiendo del número de soluciones un sistema de ecuaciones lineales se clasificará en:

a) Compatible (consistente) $\begin{cases} \text{Determinado: tiene solución única} \\ \text{Indeterminado: tiene infinidad de soluciones.} \end{cases}$

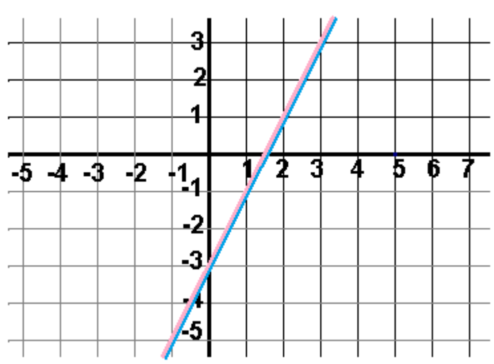
b) Incompatible (inconsistente): no tiene solución.

a) Un sistema es Compatible Determinado, cuando tiene solución única. Esto es, cuando al trazar las gráficas de cada función lineal, estas se cortan. Los sistemas del punto anterior son compatibles determinados.

Por otro lado, un sistema es Compatible Indeterminado, cuando tiene una infinidad de soluciones. Esto sucede cuando al trazar sus gráficas, estas resultan ser la misma recta, lo cual significa que se cortan en todos sus puntos, tal es la razón de que tengan una infinidad de soluciones.
Por ejemplo, el sistema formado por las ecuaciones:

$$2x - y = 3$$
$$6x - 9 = 3y$$

Es Compatible indeterminado ya que al trazar sus gráficas una queda sobre la otra, es difícil diferenciarlas gráficamente, pero quedarían de la siguiente forma:



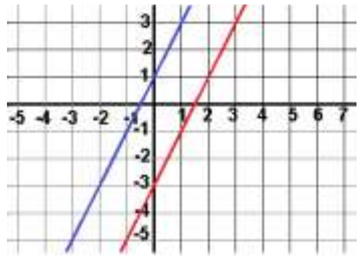
Al estar una sobre la otra se cortan en todos sus puntos, es decir, el sistema tiene una infinidad de soluciones.

b) Un sistema es incompatible, si el sistema no tiene solución. Es decir, cuando las rectas nunca se cortan, y esto sucede si las rectas son paralelas.

Por ejemplo, el sistema formado por las ecuaciones: $2x - y = 3$

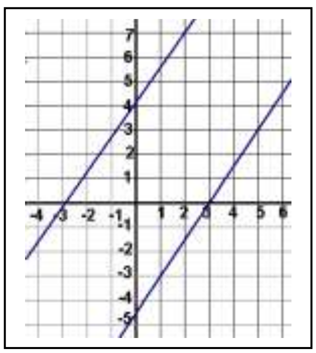
$$6x + 3 = 3y$$

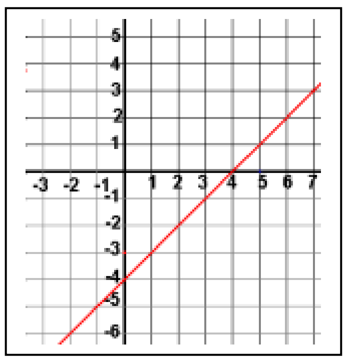
Es indeterminado, ya que al trazar sus gráficas resultan ser paralelas, nunca se cortan. Entonces NO tiene solución.

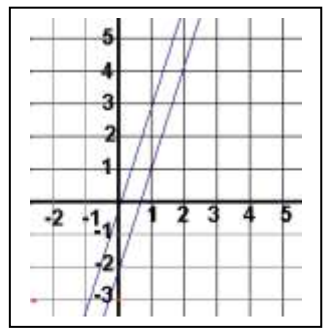


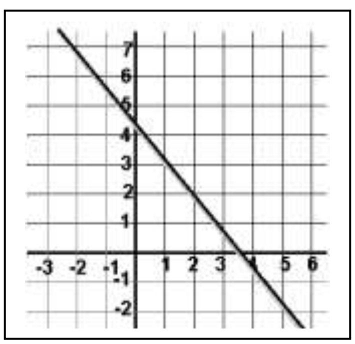
Ejercicios 4.4

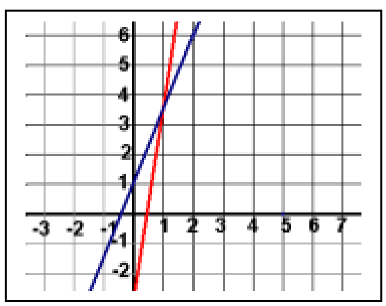
En cada caso, determina si las gráficas de cada sistema es Compatible determinado o indeterminado, o es un sistema incompatible.

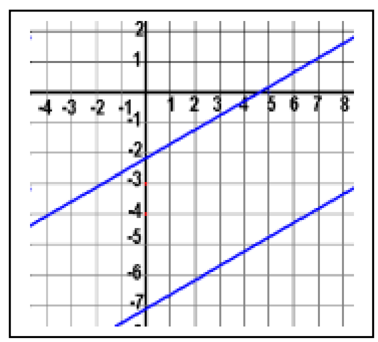
1) 

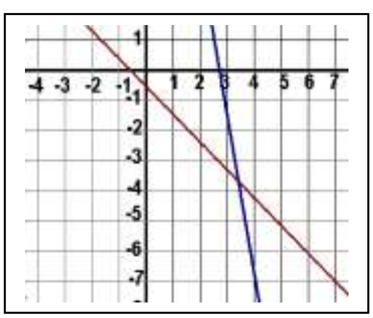
2) 

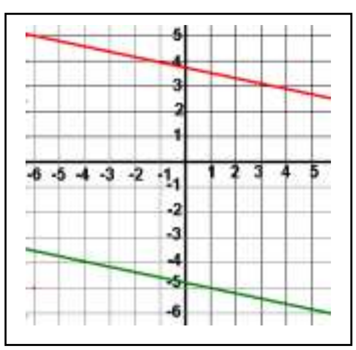
3) 

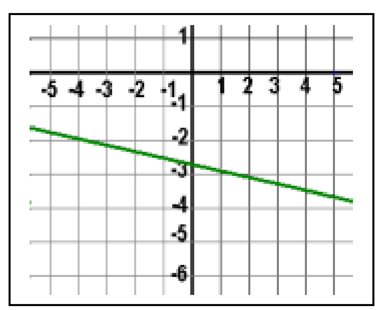
4) 

5) 

6) 

7) 

8) 

9) 

4.5 Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2. Condición de paralelismo.

Aprendizaje:
El alumno infiere la compatibilidad (con solución) e incompatibilidad (sin solución) de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2, a partir de los parámetros de las ecuaciones

Cuando te dan las gráficas de un sistema de ecuaciones lineales de 2x2, de inmediato te das cuenta si es compatible o incompatible. Pero si sólo te dan las ecuaciones y quieres determinar su compatibilidad de forma rápida, ¿cómo hay que proceder?
Respuesta:
Analizando los parámetros de las ecuaciones del sistema, ya que estos determinan fácilmente la posición relativa de las rectas, y por tanto, la solución del sistema. Los tres casos son los siguientes:

1º) *Cuando las pendientes de las dos rectas son iguales, entonces las rectas son paralelas.*

Ejemplo: ¿Cómo hago ver que el sistema formado por $\begin{matrix} 3x + 1 = 2y \\ 9x - 6y = -3 \end{matrix}$ no tiene solución?
Respuesta:
Encontramos la pendiente de cada una, para esto, se despeja la ***y*** de cada ecuación.
1ª) $3x + 1 = 2y$, $\quad \frac{3x+1}{2} = y$ es decir $y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$ y su pendiente es $a = \frac{3}{2}$
2ª) $9x - 6y = -3$, $9x + 3 = 6y$, $\quad \frac{9x+3}{6} = y$ es decir $y = \frac{9x}{6} + \frac{3}{6}$ y su pendiente es $a = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.
Como sus pendientes son iguales, entonces las rectas son paralelas, es decir nunca se cortan y en consecuencia el sistema no tiene solución.

2º) *Cuando los coeficientes son proporcionales, es decir, una ecuación es múltiplo de la otra, entonces las rectas coinciden o las dos ecuaciones representan a la misma recta*.

Ejemplo: ¿Cómo muestro que el sistema formado por $\begin{matrix} y + 2x = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{matrix}$ no tiene solución única?
Respuesta:
Ordenando de la misma forma ambas ecuaciones $\begin{matrix} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{matrix}$ se observa que la segunda es el doble de la primera.
Si se trazan sus gráficas estas coinciden, es decir, el sistema tiene una infinidad de soluciones.

3º) *Cuando las pendientes de las rectas son diferentes, entonces las rectas se cortan en un solo punto, es decir el sistema tiene solución única.*

Ejemplo: ¿El sistema $\begin{array}{r} 3x + y + 5 = 0 \\ x + 2y = 7 \end{array}$ tiene solución única?

Respuesta:
Encontramos la pendiente de cada recta. Para esto, se despeja la y de cada ecuación.
1ª) $3x + y + 5 = 0$, $y = -3x - 5$ es decir, su pendiente es $a = -3$.
2ª) $x + 2y = 7$, $2y = -x + 7$ entonces, $y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$ y su pendiente es $a = -\frac{1}{2}$.
Sus pendientes son diferentes entonces las rectas se cortan en un solo punto, es decir, la solución del sistema es única.

EN CADA CASO PUEDES TRAZAR SUS GRÁFICAS PARA COMPROBAR LO QUE SE AFIRMA.

Ejercicio 4.5

Para cada sistema determina si su solución es única, no tiene solución o tiene una infinidad de soluciones.

1) $\begin{array}{r} 5x - 2y = 7 \\ x + y = 3 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 3 - y = 2x \\ 2y = -4x + 6 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 5x = 10 - 5y \\ 5x - 5y = 10 \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 6x - 3y + 12 = 0 \\ y - 2x - 4 = 0 \end{array}$

5) $\begin{array}{r} 7x - 7y = 14 \\ x = y + 2 \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} 3 - y = 2x \\ 4y = 8 - 8x \end{array}$ 7) $\begin{array}{r} x = 10 - 5y \\ 5x - 3y = 3 \end{array}$ 8) $\begin{array}{r} 4x - 3y + 12 = 0 \\ 3y + 2x + 6 = 0 \end{array}$

9) $\begin{array}{r} x - 2y = 4 \\ 5x - 10y = 8 \end{array}$ 10) $\begin{array}{r} 4 - 6x + 2y = 0 \\ y = 3x - 2 \end{array}$

4.6 Sistemas equivalentes.

Aprendizajes:
El alumno:
- ✓ *Identifica Sistemas Equivalentes.*
- ✓ *Transforma sistemas de ecuaciones en otros equivalentes más sencillos.*

Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Para obtener un sistema de ecuaciones equivalente a un sistema dado, se pueden efectuar las siguientes transformaciones:

- Multiplicar o dividir una ecuación del sistema por un número real distinto de cero.
- Transponer los términos que sean necesarios.

Ejemplo 1) Obtener un sistema equivalente al sistema $\begin{aligned} 3x + y + 5 &= 0 \\ x + 2y &= 7 \end{aligned}$

Solución:

Multiplicamos la primer ecuación por 2 y tenemos: $6x + 2y + 10 = 0$

Multiplicamos la segunda ecuación por – 1 y tenemos: $-x - 2y = -7$

Igualamos a cero esta última ecuación: $-x - 2y + 7 = 0$

Un sistema equivalente al dado es $\begin{aligned} 6x + 2y + 10 &= 0 \\ -x - 2y + 7 &= 0 \end{aligned}$ donde ambos tienen la misma solución.

Ejemplo 2) Dado el sistema $\begin{aligned} 3x &= 9y + 15 \\ 8x + 12y &= 4 \end{aligned}$ obtener un sistema equivalente más sencillo.

Solución:

Dividimos la primer ecuación entre 3 y tenemos: $x = 3y + 5$

Dividimos la segunda ecuación entre 4 y tenemos: $2x + 3y = 1$

Un sistema equivalente más sencillo al dado es $\begin{aligned} x &= 3y + 5 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned}$ donde ambos tienen la misma solución.

Ejemplo 3) Dado el sistema $\begin{aligned} 3x &= \frac{y+4}{2} - 1 \\ \frac{4x+1}{7} &= 2y \end{aligned}$ obtener un sistema equivalente más sencillo.

Solución:

Multiplicamos la primera ecuación por 2: $2\left(3x = \frac{y+4}{2} - 1\right)$

$$6x = y + 4 - 2$$
$$6x = y + 2$$

En la segunda ecuación, el 7 que divide al lado izquierdo pasará multiplicando al lado derecho de la igualdad: $4x + 1 = 7(2y)$

$$4x + 1 = 14y$$

Un sistema equivalente y más sencillo al dado es: $\begin{aligned} 6x &= y + 2 \\ 4x + 1 &= 14y \end{aligned}$

Ejemplo 4) ¿El sistema $\begin{aligned} 4x &= 3y + 9 \\ x - 5y &= 1 \end{aligned}$ es equivalente al sistema $\begin{aligned} x - 2 &= \frac{3y+1}{4} \\ \frac{2x+3}{5} &= 2y + 1 \end{aligned}$?

Solución:

Transformamos la ecuación $x - 2 = \frac{3y+1}{4}$ a otra más sencilla: $4x - 8 = 3y + 1$

$$4x = 3y + 9$$

Efectivamente, es equivalente la primera ecuación de cada sistema.

Veamos si la segunda también lo es: $\frac{2x+3}{5} = 2y + 1$

Transponiendo términos:

$$2x + 3 = 5(2y + 1)$$
$$2x + 3 = 10y + 5$$
$$2x - 10y = 5 - 3$$
$$2x - 10y = 2$$
$$x - 5y = 1$$

Comprobamos que también es equivalente la segunda ecuación de cada sistema.

Por lo que podemos afirmar que los dos sistemas de ecuaciones SON EQUIVALENTES.

Ejercicios 4.6

1) ¿El sistema $\begin{array}{l} 7x = 2y + 1 \\ 2x - y = 3 \end{array}$ es equivalente al sistema $\begin{array}{l} x = \frac{2y+1}{7} \\ 2x - 3 = y \end{array}$?

2) ¿El sistema $\begin{array}{l} 8 = 2y + 6x \\ 3y = 1 - x \end{array}$ es equivalente al sistema $\begin{array}{l} 3x + y - 4 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{array}$?

3) ¿El sistema $\begin{array}{l} 4x = 5y + 3 \\ 4x - 3y = 2 \end{array}$ es equivalente al sistema $\begin{array}{l} x - 3 = \frac{5y+3}{4} \\ 4x - 3 = 2y \end{array}$?

4) Relaciona las columnas asociando los sistemas que sean equivalentes.

i) $5x - 2y = 7$ $5x = 10 - 5y$	A) $2 - y = 5x$ $x - y - 2 = 0$
ii) $10x + 2y = 4$ $5x - 5y = 10$	B) $5y = 5x - 10$ $\frac{5x}{3} = 1 + y$
iii) $7x - 7y = 14$ $x = 10 - 5y$	C) $7 + 2y = 5x$ $x + y - 2 = 0$
iv) $x = y + 2$ $5x - 3y = 3$	D) $y = x - 2$ $2 - y = \frac{x}{5}$

4.7 Métodos algebraicos de solución de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2: Suma y Resta, Sustitución e Igualación.

Aprendizaje:
El alumno resuelve sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2 por medio del método que considere conveniente: a) Suma y resta, b) Sustitución, c) Igualación.

Estas listo para aprender a resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 por medio de métodos algebraicos, que a diferencia del método gráfico, estos métodos permiten obtener soluciones exactas.

Los métodos son:

a) Suma y Resta, también conocido como Reducción.
b) Sustitución.
c) Igualación.

El objetivo de cada método es eliminar una incógnita, relacionando ambas ecuaciones del sistema para finalmente quedarnos con una ecuación lineal con una incógnita y resolverla. Veamos en qué consiste cada método.

4.7.1 Método de Suma y Resta o Reducción.

*En este método hay que transformar las ecuaciones en otras **ecuaciones equivalentes** (multiplicando cada una de ellas por un coeficiente), para conseguir que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en las dos ecuaciones.*
A continuación, se suman o restan, según los signos de los coeficientes, las ecuaciones para obtener una nueva ecuación en la que se ha eliminado una de las incógnitas, y por tanto, será una ecuación lineal con una sola incógnita que se resuelve para determinar su valor.
Repitiendo el proceso para la otra incógnita obtendremos la solución del sistema.

Ejemplificaremos estos pasos para resolver dos sistemas.

Ejemplo 1) Resolver el sistema

$$x + 5y = 8 \longrightarrow (1)$$
$$3x - y = 6 \longrightarrow (2)$$

Solución:

1º) Se elige la incógnita a eliminar, puede ser x o y, empecemos con x.

Nos fijamos en los coeficientes de x.

En la ecuación 1 es: 1

En la ecuación 2 es: 3

Para que el coeficiente de $\boldsymbol{x}$ sea el mismo en ambas ecuaciones, sólo se debe de multiplicar la primera ecuación por **3**: $\mathbf{3}(x + 5y = 8)$ resulta $3x + 15y = 24$.

Un sistema equivalente al original es $\begin{matrix} 3x + 15y = 24 \\ 3x - y = 6 \end{matrix}$ donde los coeficientes de $\boldsymbol{x}$ son iguales.

2º) Restando estas dos ecuaciones:

$$-\left.\begin{array}{r} 3x + 15y = 24 \\ 3x - y = 6 \\ \hline \end{array}\right\} \quad \text{Esta operación es equivalente a:} \quad +\begin{array}{r} 3x + 15y = 24 \\ -3x + y = -6 \\ \hline 0 + 16y = 18 \end{array}$$

3º) Se resuelve la ecuación lineal con una incógnita:

$$16y = 18$$
$$y = \frac{18}{16}$$
$$y = \frac{9}{8} = 1.125$$

4º) Se repite el proceso para la otra incógnita que es $\boldsymbol{y}$.

El coeficiente de $\boldsymbol{y}$ en la ecuación 1 es: 5

Y en la ecuación 2 es: – 1

Para que el coeficiente de $\boldsymbol{y}$ sea el mismo en ambas ecuaciones, sólo se debe de multiplicar la segunda ecuación por **5**: **5**$(3x - y = 6)$ resulta $15x - 5y = 30$.

Un sistema equivalente al dado es $\begin{matrix} x + 5y = 8 \\ 15x - 5y = 30 \end{matrix}$ donde los coeficientes de $\boldsymbol{y}$ son iguales y tienen signo contrario.

5º) Sumando estas dos ecuaciones se tiene:

$$+\begin{array}{r} x + 5y = 8 \\ 15x - 5y = 30 \\ \hline 16x + 0 = 38 \end{array}$$

6º) Se resuelve la ecuación lineal:

$$16x = 38$$
$$x = \frac{38}{16}$$
$$x = \frac{19}{8} = 2.375$$

7º) La solución del sistema es: $\boldsymbol{x} = \frac{19}{8}$ y $\boldsymbol{y} = \frac{9}{8}$ ó $\boldsymbol{x} = 2.375$ y $\boldsymbol{y} = 1.125$

Es decir, las rectas que representan cada función lineal del sistema se cortan en el punto (2.375 , 1.125).

COMPROBACIÓN

Se sustituye el valor encontrado para $\boldsymbol{x}$ y para $\boldsymbol{y}$ en ambas ecuaciones del sistema original donde deben quedar las igualdades verdaderas.

En $x + 5y = 8$ y en $3x - y = 6$

$$\frac{19}{8} + 5\left(\frac{9}{8}\right) = 8 \qquad 3\left(\frac{19}{8}\right) - \frac{9}{8} = 6$$

$$\frac{19}{8} + \frac{45}{8} = 8 \qquad \frac{57}{8} - \frac{9}{8} = 6$$

$$\frac{64}{8} = 8 \qquad \frac{48}{8} = 6$$

$$8 = 8 \qquad 6 = 6$$

Ejemplo 2) Resolver el sistema

$$2x + 3y = 5 \longrightarrow (1)$$
$$5x - 2y = -16 \longrightarrow (2)$$

Solución:

1º) Se elige la incógnita a eliminar, puede ser x o y, empecemos con y.

Nos fijamos en los coeficientes de $\boldsymbol{y}$.

En la ecuación 1 es: 3

En la ecuación 2 es: – 2

Para que el coeficiente de $\boldsymbol{y}$ sea el mismo en ambas ecuaciones, se debe de multiplicar la primera ecuación por **2**: $\mathbf{2}(2x + 3y = 5)$ resulta $4x + 6y = 10$.

Después, la segunda ecuación se multiplica por **3**: $\mathbf{3}(5x - 2y = -16)$ resulta

$$15x - 6y = -48$$

Un sistema equivalente al dado es $\begin{array}{r} 4x + 6y = 10 \\ 15x - 6y = -48 \end{array}$ donde los coeficientes de $\boldsymbol{y}$ son iguales de signo contrario.

2º) Sumando estas dos ecuaciones se tiene:

$$\begin{array}{rr} & 4x + 6y = 10 \\ + & 15x - 6y = -48 \\ \hline & 19x + 0 = -38 \end{array}$$

3º) Se resuelve la ecuación lineal con una incógnita:

$$19x = -38$$
$$x = \frac{-38}{19}$$
$$x = -2$$

4º) Se repite el proceso para la otra incógnita que es $\boldsymbol{x}$.

El coeficiente de $\boldsymbol{x}$ en la ecuación 1 es: 2

Y en la ecuación 2 es: 5

Para que el coeficiente de x sea el mismo en ambas ecuaciones, se debe multiplicar la primera ecuación por **5**: **5**$(2x + 3y = 5)$ resulta $10x + 15y = 25$.

La segunda ecuación por **2**: **2**$(5x - 2y = -16)$ resulta $10x - 4y = -32$

Un sistema equivalente al dado es $\begin{array}{l} 10x + 15y = 25 \\ 10x - 4y = -32 \end{array}$ donde los coeficientes de x son iguales.

5º) Restando estas dos ecuaciones se tiene:

$$- \left.\begin{array}{r} 10x + 15y = 25 \\ 10x - 4y = -32 \\ \hline \end{array}\right\} \text{Esta operación es equivalente a:} \quad + \begin{array}{r} 10x + 15y = 25 \\ -10x + 4y = 32 \\ \hline 0 + 19y = 57 \end{array}$$

6º) Se resuelve la ecuación lineal con una incógnita:

$$19y = 57$$
$$y = \frac{57}{19}$$
$$y = 3$$

7º) La solución del sistema es: $x = -2$ y $y = 3$

Es decir, las rectas que representan cada función lineal del sistema se cortan en el punto $(-2, 3)$.

NOTA: Estos últimos cuatro pasos suelen omitirse, porque se puede sustituir el valor encontrado en la ecuación 1 ó en la 2 para encontrar el valor de la segunda incógnita.

COMPROBACIÓN

Se sustituye el valor encontrado para x y para y en ambas ecuaciones del sistema original y deben de quedar las igualdades verdaderas.

En $2x + 3y = 5$ y en $5x - 2y = -16$

$$\begin{array}{r} 2(-2) + 3(3) = 5 \\ -4 + 9 = 5 \\ 5 = 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5(-2) - 2(3) = -16 \\ -10 - 6 = -16 \\ -16 = -16 \end{array}$$

4.7.2 Método por Sustitución.

Los pasos que son necesarios realizar son:

1. Despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

2. Sustituir el valor de dicha incógnita en la otra ecuación.

3. Resolver la ecuación obtenida que será una ecuación lineal con una sola incógnita.

4. Una vez obtenido el valor de la incógnita, se sustituye en la expresión obtenida en el paso 1 para determinar el valor de la otra incógnita.

Realizamos estos pasos para resolver los mismos sistemas resueltos en el ejemplo anterior, de manera que puedas comparar los distintos métodos.

Ejemplo 1) Resolver el sistema $x + 5y = 8 \longrightarrow (1)$

$3x - y = 6 \longrightarrow (2)$

Solución:

1º) Se elige la incógnita a despejar: Puede ser x ó y, se sugiere la que sea más fácil despejar, en este caso, es $\boldsymbol{x}$ de la ecuación 1: $x = -5y + 8$

2º) Este valor se sustituye en la ecuación 2: $3(-5y + 8) - y = 6$

3º) Se resuelve la ecuación lineal: $-15y + 24 - y = 6$

$$-16y = 6 - 24$$

$$y = \frac{-18}{-16}$$

$$y = \frac{9}{8} = 1.125$$

4º) Este valor de $\boldsymbol{y}$ se sustituye en: $x = -5y + 8$

$$x = -5\left(\frac{9}{8}\right) + 8 = -\frac{45}{8} + 8 = \frac{19}{8}$$

La solución del sistema es: $\boldsymbol{x} = \frac{19}{8}$ y $\boldsymbol{y} = \frac{9}{8}$ ó $\boldsymbol{x} = 2.375$ y $\boldsymbol{y} = 1.125$

Observa que es el mismo resultado que con el método de Suma y Resta.

Ejemplo 2) Resolver el sistema $2x + 3y = 5 \longrightarrow (1)$

$5x - 2y = -16 \longrightarrow (2)$

Solución:

1º) Se elige la incógnita a despejar: Puede ser x ó y, elegimos la de números más chicos, despejemos $\boldsymbol{x}$ de la ecuación 1: $x = \frac{5 - 3y}{2}$

2º) Este valor se sustituye en la ecuación 2: $5\left(\frac{5-3y}{2}\right) - 2y = -16$

3º) Se resuelve la ecuación lineal:

$$\frac{25-15y}{2} - 2y = -16$$

$$2\left(\frac{25-15y}{2} - 2y = -16\right)$$

$$25 - 15y - 4y = -32$$

$$-19y = -32 - 25$$

$$y = \frac{-57}{-19} = 3$$

4º) Este valor de $\boldsymbol{y}$ se sustituye en: $x = \frac{5-3y}{2}$

$$x = \frac{5-3(\ 3)}{2} = \frac{5-9}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

La solución del sistema es: $\boldsymbol{x} = -2$ y $\boldsymbol{y} = 3$

4.7.3 Método por Igualación.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales aplicando el método de igualación realizamos los pasos siguientes:
1. Despejar una misma incógnita en las dos ecuaciones.
2. Igualar las expresiones obtenidas.
3. Resolver la ecuación obtenida en el paso anterior que será una ecuación lineal con una sola incógnita.
4. Una vez obtenido el valor de la incógnita, se sustituye en cualquiera de las expresiones obtenidas en el paso 1 para determinar el valor de la otra incógnita.

Realizamos estos pasos para resolver los mismos sistemas anteriores aplicando en este caso el método de Igualación, el objetivo de que sean los mismos sistemas es que puedas comparar los métodos y adoptes el que más se te facilite.

Ejemplo 1) Resolver el sistema

$$x + 5y = 8 \longrightarrow (1)$$

$$3x - y = 6 \longrightarrow (2)$$

Solución:

1º) Se elige la incógnita a despejar: despejemos a $\boldsymbol{x}$ en la ecuación 1: $x = -5y + 8$

Despejemos también a $\boldsymbol{x}$ en la ecuación 2: $x = \frac{6+y}{3}$

2º) Igualamos las expresiones obtenidas: $-5y + 8 = \dfrac{6+y}{3}$

3º) Resolvemos la ecuación lineal obtenida: $3(-5y + 8) = 6 + y$

$$-15y + 24 = 6 + y$$
$$-15y - y = 6 - 24$$
$$-16y = -18$$
$$y = \frac{-18}{-16} = \frac{9}{8}$$

4º) El valor de y se sustituye en cualquiera de los despejes hechos en el paso 1:

Supongamos que en: $x = -5y + 8$

$$x = -5\left(\frac{9}{8}\right) + 8 = -\frac{45}{8} + 8 = \frac{19}{8}$$

La solución del sistema es: $\boldsymbol{x} = \dfrac{19}{8}$ y $\boldsymbol{y} = \dfrac{9}{8}$ ó $\boldsymbol{x} = 2.375$ y $\boldsymbol{y} = 1.125$

Ejemplo 2) Resolver el sistema

$$2x + 3y = 5 \longrightarrow (1)$$
$$5x - 2y = -16 \longrightarrow (2)$$

Solución:

1º) Despejemos a $\boldsymbol{x}$ en la ecuación 1: $x = \dfrac{5-3y}{2}$

Despejemos también a $\boldsymbol{x}$ en la ecuación 2: $x = \dfrac{-16+2y}{5}$

2º) Igualamos las expresiones obtenidas: $\dfrac{5-3y}{2} = \dfrac{-16+2y}{5}$

3º) Resolvemos la ecuación lineal obtenida: $5(5 - 3y) = 2(-16 + 2y)$

$$25 - 15y = -32 + 4y$$
$$25 + 32 = 4y + 15y$$
$$57 = 19y$$
$$\frac{57}{19} = y$$
$$y = 3$$

4º) El valor de y se sustituye en cualquiera de los despejes hechos en el paso 1:

Sustituimos en el primer despeje: $x = \frac{5 - 3y}{2}$

$$x = \frac{5 - 3(\ 3)}{2} = \frac{5 - 9}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

La solución del sistema es: $\boldsymbol{x} = -2$ y $\boldsymbol{y} = 3$

Ejercicio 4.7

I. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Suma y Resta.

1) $7x + y - 2 = 0$
$x - 3y + 5 = 0$

2) $3x - 2y = 4$
$5x + 16 = -4y$

3) $2x = 4y - 2$
$5y + 8 = x$

4) $2x - 5y = 15$
$3x + 2y = -8$

5) $4x - y = -6$
$2y = 10 + 8x$

6) $5x = 3y - 1$
$x - 3y + 5 = 0$

II. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Sustitución.

1) $5x - 3y = -1$
$x = 3y - 5$

2) $7x = y - 3$
$2x - 6 = 3y$

3) $2x = y + 2$
$2y + 1 = x$

4) $4x - 2y = 8$
$y = 2x - 4$

5) $5x - 3y = -6$
$2x + 5y = 15$

6) $3x = y - 1$
$x - 3 = 2y$

III. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Igualación.

1) $3y - x - 6 = 0$
$2x = y + 3$

2) $2x + y - 2 = 0$
$x - 3y = 8$

3) $2y = x + 2$
$2x + 1 = y$

4) $2x + y - 2 = 0$
$x - 3y + 5 = 0$

5) $3x - 2y = 4$
$5x + 19 = -4y$

6) $5x = 4y - 2$
$5y + 1 = x$

IV. Resuelve los siguientes sistemas por el método que más se te facilite.

1) $x + 6y = 18$
$2x - y + 16 = 0$

2) $3x = y - 2$
$6x + 4 = 2y$

3) $x = y - 3$
$6y - 1 = 7x$

4.8 Miscelánea de problemas que llevan a plantear sistemas de ecuaciones lineales.

Aprendizajes:

El alumno:

- ✓ *Traduce las condiciones o restricciones del problema a un sistema de ecuaciones.*
- ✓ *Plantea problemas en diferentes contextos que lleven a sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2 y los resolverá por cualquier método algebraico.*
- ✓ *Percibe que los sistemas de ecuaciones lineales, permiten representar, analizar y resolver diversos problemas de su entorno.*

Ahora si vamos a resolver problemas planteando un sistema de ecuaciones y resolviéndolo por algún método algebraico.

Ejemplo 1) El otro día mi abuelo de 70 años de edad quiso repartir entre sus nietos cierta cantidad de dinero. Si nos daba \$300 a cada uno le sobraba \$600, y si nos daba \$500 le faltaba \$1000. ¿Cuántos nietos tiene? ¿Qué cantidad quería repartir?

Solución:

Tenemos que encontrar cuantos nietos tiene el abuelo y qué cantidad de dinero quería repartir, esas serán nuestras incógnitas.

x: cantidad de nietos.

y: cantidad de dinero a repartir.

Planteamientos:

Si nos daba \$300 a cada uno le sobraba \$600: $y - x(300) = 600$

Si nos daba \$500 a cada uno le faltaba \$1000: $y - x(500) = -1000$

Resolviendo el sistema por el método de Suma y Resta:

Restamos las ecuaciones: $-\begin{array}{r} y - x(300) = 600 \\ \underline{y - x(500) = -1000} \end{array}$ equivalente a $\begin{array}{r} y - x(300) = 600 \\ \underline{-y + x(500) = 1000} \end{array}$

$$200x = 1600$$

$$x = \frac{1600}{200}$$

Entonces, $x = 8$, este valor lo sustituimos en $y - x(300) = 600$ y resulta $y = 3000$

Respuesta al problema: El abuelo tiene 8 nietos y la cantidad que quería repartir es de \$3000.

COMPROBACIÓN:

Si les daba \$300 a cada nieto sería en total 8(300) = 2400. Pero como tenía \$3000 le sobraban \$600.

Si les daba \$500 a cada nieto sería 8(500) = 4000, como sólo tiene \$3000 le faltan \$1000.

Ejemplo 2) Un comerciante de ultramarinos vende el Kg de azúcar a \$19. Además, tiene café de dos clases; cuando toma 3 Kg de la primera calidad y 5 Kg de la segunda resulta la mezcla a \$195 el Kg, y cuando toma 7 Kg de la primera clase y 3 Kg de la segunda entonces resulta la mezcla a \$221 el Kg ¿Cuál es el precio de cada calidad de café?

Solución:
Nos preguntan el precio de cada clase de café, entonces nuestras incógnitas son:
x: precio del café de primera calidad.
y: precio del café de segunda calidad.

Planteamientos:
3 Kg de la primera calidad y 5 Kg de la segunda resulta la mezcla a \$195 el Kg:

$$3x + 5y = 195(8) = 1560$$

7 Kg de la primera clase y 3 Kg de la segunda entonces resulta la mezcla a \$221 el Kg:

$$7x + 3y = 221(10) = 2210$$

(Si te das cuenta el dato del azúcar no tiene nada que ver con los cafés.)

Tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 1560 \longrightarrow (1) \\ 7x + 3y &= 2210 \longrightarrow (2) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema por el método de Sustitución:

1º) Despejamos y en la ecuación 1: $y = \dfrac{1560-3x}{5} \longrightarrow (3)$

2º) Sustituyendo este valor en la ecuación 2: $7x + 3\left(\dfrac{1560-3x}{5}\right) = 2210$

3º) Resolviendo la ecuación lineal: $5\left(7x+3\left(\dfrac{1560-3x}{5}\right)=2210\right)$

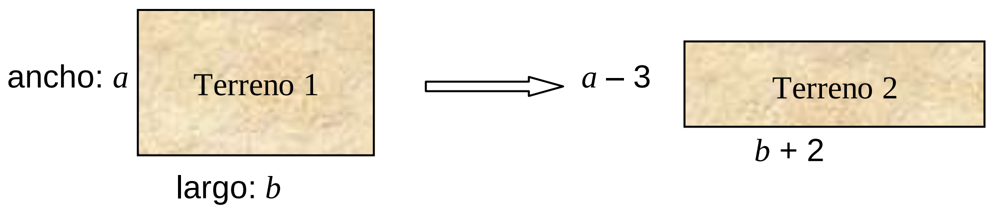
$$35x + 3(1560 - 3x) = 5(2210)$$
$$35x + 4680 - 9x = 11050$$
$$26x = 11050 - 4680$$
$$26x = 6370$$
$$x = 245$$

4º) Sustituyendo este valor en la ecuación 3: $y = \dfrac{1560-3(\ 245)}{5} = 165$

Respuesta al problema: Precio del café de primera clase \$245.
Precio del café de segunda clase \$165.

Ejemplo 3) El perímetro de un terreno rectangular mide 36 metros. Si se aumenta en 2 metros su largo y se disminuye en 3 metros su ancho el área no cambia. Calcula las dimensiones del terreno.

Solución:
Nos piden las dimensiones del terreno, que son el largo y su ancho, un dibujo de lo que afirma el problema nos ayudará a plantear el sistema de ecuaciones.



Planteamiento del problema:
El perímetro del terreno 1 es de 36 metros: $2a + 2b = 36$
Área del terreno 1 = largo × ancho = $b\,(a)$
Área del terreno 2 = $(b + 2)(a - 3)$

Como las áreas no cambian, quiere decir que:

$$\text{Área del terreno 1} = \text{Área del terreno 2}$$
$$b\,(a) = (b + 2)(a - 3)$$

El sistema de ecuaciones que nos sirve es:
$$\begin{aligned} 2a + 2b &= 36 \\ b\,(a) &= (b + 2)(a - 3) \end{aligned}$$

Operando cada ecuación, un sistema equivalente al anterior es:
$$\begin{aligned} a + b &= 18 \\ 2a - 3b &= 6 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema por el método de Suma y Resta:
Se multiplica la primera ecuación por 3 para eliminar a ***b*** y se suma con la segunda ecuación del sistema:
$$\begin{aligned} 3a + 3b &= 54 \\ 2a - 3b &= 6 \\ \hline 5a + 0 &= 60 \end{aligned}$$
$$a = \frac{60}{5} = 12$$

Este valor se sustituye en $a + b = 18$ para encontrar el valor de b:
$$12 + b = 18$$
$$b = 6$$

Respuesta: El largo del terreno 1 es de 6 metros y el ancho es de 12 m.
El largo del terreno 2 es de 8 metros y el ancho es de 9 m.

COMPROBACIÓN:
El perímetro del terreno1 es: $2(12) + 2(6) = 24 + 12 = 36$ cumple con el dato dado.
$$\left.\begin{aligned} &\text{Área del terreno1} = 6(12) = 72\ m^2 \\ &\text{Área del terreno2} = 8(9) = 72\ m^2 \end{aligned}\right\}\ \text{Se cumple que las áreas son iguales.}$$

Ejemplo 4) Tu profesora de matemáticas hace un paseo por el bosque de la marquesa, primero pasea a caballo y después conduce una cuatrimoto. Se tarda 1 hora 20 minutos en hacer todo el recorrido y pagó $390. Estima que la cuatrimoto viaja a un promedio de 15 km/h por hora y que en el caballo a solamente 7 km/h. Si la tarifa del caballo es de $40 el kilómetro y la cuatrimoto es de $20 el kilómetro, ¿Qué distancia recorre en cada medio de transporte?

Solución:
Supongamos que m son los kilómetros que recorre en la cuatrimoto y c son los kilómetros que recorre en caballo. Suponiendo que no se pierde tiempo en cambiar de transporte, entonces:

Tiempo en cuatrimoto + Tiempo en caballo = 1 hora 20 minutos

$20(km recorridos en la cuatrimoto) + $40(km recorridos a caballo) = $390

Escribiremos estas ecuaciones en términos de las incógnitas.

Sabemos por la fórmula de física: $d = vt$

Aplicándolo al problema: $m = 15T$ y $c = 7t$

Despejando T y t en cada fórmula: $T = \frac{m}{15}$ y $t = \frac{c}{7}$

La ecuación 1 es: $\frac{m}{15} + \frac{c}{7} = \frac{4}{3}$ ya que 1 hora 20 minutos = $\frac{4}{3}$ horas.

La ecuación 2 es: $20m + 40c = 390$

Operando cada ecuación y reduciendo términos, un sistema equivalente es:

$$\begin{aligned} 7m + 15c &= 140 \\ 2m + 4c &= 39 \end{aligned}$$

Resolviéndolo por el método de Suma y Resta:

$$\begin{aligned} 2(7m + 15c = 140) &\longrightarrow 14m + 30c = 280 \\ -7(2m + 4c = 39) &\longrightarrow \underline{14m - 28c = -273} \\ & \qquad 2c = 7 \\ & \qquad c = 3.5 \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en $2m + 4c = 39$: $2m + 4(3.5) = 39$

$$2m = 39 - 14 = 25$$
$$m = 12.5$$

Respuesta: En cuatrimoto recorre 12.5 km.
En caballo recorre 3.5 km.

COMPROBACIÓN:

Tiempos: $T = \dfrac{12.5}{15} = \dfrac{\frac{25}{2}}{\frac{15}{1}} = \dfrac{5}{6}$ y $t = \dfrac{3.5}{7} = \dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{1}} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$ horas = 1 hora 20 minutos.

Pago total: 20(12.5) + 40(3.5) = 250 + 140 = 390 pesos.

Ejemplo 5) La cantidad de dinero guardado en dos bolsas es \$2150. Si de la bolsa que tiene más dinero se extrae \$120 y se ponen en la otra, ambas tendrán lo mismo. ¿Cuánto tenía originalmente la bolsa con más dinero?

Solución:
Queremos saber cuánto dinero hay en cada bolsa. Supongamos que $\boldsymbol{x}$ es el dinero que hay en la bolsa con más dinero. Y supongamos que $\boldsymbol{y}$ es el dinero que hay en la otra bolsa.
Planteamiento:
Cantidad de dinero guardado en dos bolsas es \$2150: $x + y = 2150$
Si de la bolsa que tiene más dinero se extraen \$120 y se ponen en la otra, ambas tendrán lo mismo: $x - 120 = y + 120$

Tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} x + y &= 2150 \\ x - 120 &= y + 120 \end{aligned}$$

Para resolverlo usaremos el método de Igualación:

1º) Despejamos x en cada ecuación: $x = 2150 - y$
$x = 120 + y + 120$
2º) Igualando cada expresión: $2150 - y = 120 + y + 120$
3º) Resolviéndola: $2150 - 240 = 2y$
$y = 955$
4º) Sustituyendo este valor en $x = 2150 - y$ resulta $x = 1195$

Respuesta: Originalmente la bolsa con más dinero tenía \$1195.

COMPROBACIÓN:
Cantidad de dinero guardado en las dos bolsas: \$1195 + \$955 = \$2150
Si de la bolsa que tiene más dinero se extrae \$120 se tiene: \$1195 - \$120 = \$1075
Si a la otra bolsa se le ponen \$120 se tiene: \$955 + \$120 = \$1075
Después de estas dos últimas acciones, ambas bolsas tienen lo mismo.

Ejemplo 6) Se tienen dos contenedores de crema, el primero tiene un 25% de grasa, mientras que el segundo tiene 75% de grasa se quieren mezclar para obtener una crema con 40% de grasa. ¿Cuántos litros de cada tipo, se requieren para obtener 100 litros de esta nueva crema?

Solución:
Se tiene que encontrar cuántos litros de cada tipo de crema se necesitan para obtener 100 litros de la nueva crema.
Supongamos que $\boldsymbol{p}$ es la cantidad de crema con un 25% de grasa: $0.25p$
Y supongamos que $\boldsymbol{q}$ es la cantidad de crema con un 75% de grasa: $0.75q$

Planteamiento:
Las cantidades de ambas cremas deben de dar 100 litros: $p + q = 100$
Se quieren mezclar los dos tipos de crema para obtener una crema con 40% de grasa: $0.25p + 0.75q = 0.4(100)$

Tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} p + q &= 100 \\ 0.25p + 0.75q &= 40 \end{aligned}$$

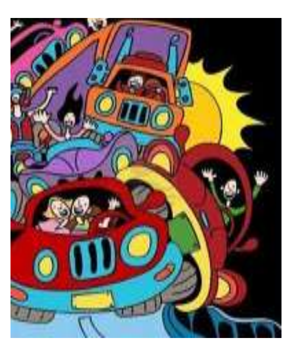
Para resolverlo usaremos el método de Sustitución:
1º) Se despeja q en la primer ecuación: $q = 100 - p$
2º) Se sustituye en la segunda ecuación: $0.25p + 0.75(100 - p) = 40$
3º) Se resuelve la ecuación lineal:

$$\begin{aligned} 0.25p + 75 - 0.75p &= 40 \\ -0.50p &= 40 - 75 \\ p &= 70 \end{aligned}$$

4º) El valor $p = 70$ se sustituye en $q = 100 - p$, y se obtiene $q = 30$.

Respuesta:
Se requieren 70 litros de crema con 25% de grasa y 30 litros con 75% de grasa, para obtener 100 litros con 40% de grasa.

COMPROBACIÓN:
Es claro que 70 + 30 = 100
De 70 litros con 25% de grasa se obtiene 17.5 litros de pura grasa.
De 30 litros con 75% de grasa se obtiene 22.5 litros de pura grasa.
Entonces mesclando las cremas se tiene 17.5 + 22.5 = 40 litros de pura grasa, como son 100 litros, la mescla queda al 40%.



Ejemplo 7) Raquel viaja a velocidad constante de la ciudad de Atlixco Puebla a la ciudad de Salamanca Guanajuato, estas ciudades están separadas por 440 km. Mónica viaja a velocidad constante de la ciudad de Zacatecas a Salamanca, separadas por 337 km. Se sabe que Raquel viaja a una velocidad superior a la de Mónica en 15 km. ¿A

qué velocidad viaja cada una de ellas si ambos llegaron a su destino al mismo tiempo?

Solución:
Tenemos que responder a qué velocidad viaja cada una de ellas si ambos llegaron a su destino al mismo tiempo.
Supongamos que x representa la velocidad a que viaja Raquel, y representa la velocidad a que viaja Mónica.

Planteamiento:
Usaremos la fórmula: $\boldsymbol{d = vt}$
Raquel recorrió 440 km a una velocidad x: $440 = xt$
Mónica recorrió 337 km a una velocidad y: $337 = yT$
El problema dice que llegaron al mismo tiempo, para esto despejamos el tiempo de cada ecuación y se tiene: $t = \frac{440}{x}$ y $T = \frac{337}{y}$, e igualando ambos resultados: $\frac{440}{x} = \frac{337}{y}$
Por otro lado, nos dicen que “Se sabe que Raquel viaja a una velocidad superior a la de Mónica en 15 km”: $x = y + 15$

Entonces, el sistema de ecuaciones que se obtiene es:

$$\frac{440}{x} = \frac{337}{y}$$
$$x = y + 15$$

Resolviendo por el método de Sustitución:

Cómo en la segunda ecuación x está despejada, se sustituye en la primera:

$$\frac{440}{y+15} = \frac{337}{y}$$

Se resuelve la ecuación lineal: $440y = 337(y + 15)$

$$440y - 337y = 337(15)$$
$$103y = 5055$$
$$y = 49.07 \approx 49 \text{ (aproximadamente)}$$

El valor $y = 49$ se sustituye en $x = y + 15$, y se obtiene $x = 64$.

Respuesta:
La velocidad a que viaja Raquel es 64 km/h.
La velocidad a que viaja Mónica es 49 km/h.

Para hacer la comprobación se debe calcular el tiempo en que hicieron el recorrido, para esto se sustituye el valor de x en $t = \frac{440}{x}$, y resulta $t = 6.875$ horas.

COMPROBACIÓN:
Es fácil ver que la velocidad de Raquel es 15 km/h mayor que la de Mónica, ya que 64 – 49 = 15.
Distancia recorrida por Raquel: 64(6.875) = 440
Distancia recorrida por Mónica: 49(6.875) = 336.875 $\approx$ 337

Ejemplo 8) Un reloj señala las tres en punto. Por tanto las manecillas del reloj forman un ángulo recto. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que formen de nuevo un ángulo recto?

Solución:
Análisis sobre el movimiento de las manecillas:

El minutero se mueve 6º cada minuto. La manecilla de las horas se mueve 30º cada hora o cada 60 minutos.
De esto, podemos afirmar que cuando el minutero avanza un minuto, la manecilla de las horas se mueve $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ = 0.5 grado.
Planteamiento:
Supongamos que m son los minutos que avanza el reloj, entonces la manecilla de los minutos se mueve $6m$ grados, mientras que la manecilla de las horas avanza $0.5m$ grados.
De la manecilla de las horas (h) nos interesa el movimiento después de 90º, entonces, $h = 90º + 0.5m$ grados.
Por otro lado, queremos que las manecillas del reloj vuelvan a formar un ángulo de 90º, esto sucederá cuando: $6m - h = 90º$

Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$h = 90º + 0.5m$$
$$6m - h = 90º$$

Resolviéndolo por el método de Sustitución:
El valor de h se sustituye en la segunda ecuación: $6m - (90º + 0.5m) = 90º$
Se resuelve la ecuación lineal: $6m - 90 - 0.5m = 90º$

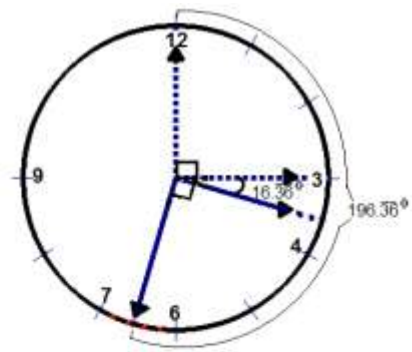
$$5.5\,m = 90º + 90º$$
$$m = \frac{180}{5.5} = 32.\overline{72}$$

Respuesta: a los $32.\overline{72}$ minutos las manecillas vuelven a formar un ángulo de 90º.

Para hacer la comprobación necesitamos saber cuántos grados ha recorrido la manecilla de las horas. Entonces sustituyendo el valor de $\boldsymbol{m}$ en $h = 90º + 0.5m$, resulta $h = 106.\overline{36}$ grados.

COMPROBACIÓN:
Cuando la manecilla del minutero está en $32.\overline{72}$ minutos ha recorrido un ángulo de $6(32.\overline{72}) = 196.\overline{36}$ grados.

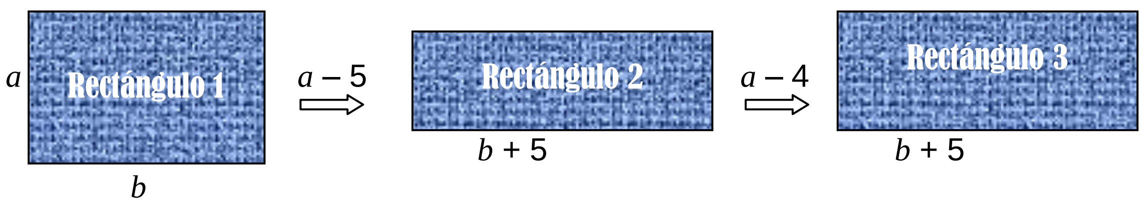
Mientras que la manecilla de las horas ha recorrido $0.5(32.\overline{72}) = 16.\overline{36}$ grados, más los 90º desde su posición inicial son $106.\overline{36}$ grados.



Restando $196.\overline{36} - 106.\overline{36} = 90º$
Observa la figura, donde se marcan las manecillas en su posición inicial y la final.

Ejemplo 9) Calcula las dimensiones de un rectángulo tal que si se aumenta la base en 5 metros y se disminuye la altura en otros 5 la superficie no varía; pero si al rectángulo original se le aumenta la base en 5 y disminuye su altura en 4, la superficie aumenta en 4 metros cuadrados.

Solución:
Nos piden las dimensiones del rectángulo, que son la base y su altura, un dibujo de lo que afirma el problema nos ayudará a plantear el sistema de ecuaciones.



Planteamiento del problema:

Área del rectángulo 1 = base $\times$ altura = $b\,(a)$
Área del rectángulo 2 = $(b + 5)(a - 5) = ba - 5b + 5a - 25$
Área del rectángulo 3 = $(b + 5)(a - 4) = ba - 4b + 5a - 20$

Nos dicen que: área rectángulo 2 = área rectángulo 1
área rectángulo 3 = área rectángulo 1 + 4

En lenguaje algebraico se tiene:
$ba - 5b + 5a - 25 = ba$ es equivalente a $5a - 5b = 25$
$ba - 4b + 5a - 20 = ba + 4$ equivalente a $5a - 4b = 24$

Tenemos que resolver el sistema:
$$5a - 5b = 25$$
$$5a - 4b = 24$$

Usando el método de Suma y Resta:
$$5a - 5b = 25$$
$$-\ 5a + 4b = -24$$

$$0 \;-\; b = 1 \quad \text{es decir} \quad b = -1$$

Encontramos la solución del sistema, pero NO es la del problema, ya que al interpretarlo nos dice que la base debe de medir – 1 que no puede ser.

Respuesta: El problema NO tiene solución con los datos dados.

Ejercicios 4.8

Resuelve los siguientes problemas planteando un sistema de ecuaciones cuya solución te de la solución del problema.

1) En mi clase están 35 alumnos. Nos han regalado por nuestro buen comportamiento 2 bolígrafos a cada chica y un cuaderno a cada chico. Si en total han sido 55 regalos, ¿cuántos chicos y chicas están en mi clase?

2) Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tienen cada uno?

3) Mi padrino tiene 80 años y me contó el otro día que entre nietas y nietos suman 8 y que si les diese $1000 a cada nieta y $500 a cada nieto se gastaría $6500 ¿Cuántos nietos y nietas tiene mi padrino?

4) Sabemos que mi tío tiene 27 años más que su hijo y que dentro de 12 años le doblará la edad. ¿Cuántos años tiene cada uno?

5) Mi tío le dijo a su hija. "Hoy tu edad es 1/3 de la mía y hace 9 años no era más que 1/5". ¿Qué edad tienen mi tío y su hija?

6) Con $300 que le ha dado su madre Juan ha comprado un total de 14 litros de leche entera y de leche deslactosada por un total de $225.5. Si el litro de leche entera cuesta $14.5 y el de deslactosada $17. ¿Cuántos litros ha comprado de cada tipo?

7) En un puesto de verduras se han vendido 8 Kg de naranjas y 5 Kg de papas por $100 y 4 Kg de naranjas y 3 Kg de papas por $54.8. Calcula el precio de los kilogramos de naranjas y de papas.

8) El día del estreno de una película se vendieron 600 entradas y se recaudaron $25580. Si los adultos pagaban $45 y los niños $35 ¿Cuántos adultos y cuántos niños asistieron al cine ese día?

9) En una librería han vendido 20 libros a dos precios distintos: unos a $80 y otros a $120 con los que han obtenido $1920. ¿Cuántos libros han vendido de cada precio?

10) En una pastelería se fabrican dos clases de pasteles. El primero necesita 2.4 Kg de masa y 3 horas de elaboración. El segundo necesita 4 Kg de masa y 2 horas de elaboración. Calcula el número de pasteles elaborados de cada tipo si se han dedicado 67 horas de trabajo y 80 Kg de masa.

11) Un abarrotero compró chocolates a \$6 la unidad y malvaviscos a \$2 cada uno por un total de \$120. Como se le estropean 5 chocolates y 9 malvaviscos calcula que si vende cada malvavisco a \$1 más y cada chocolate a \$3 más de lo que le costó perdería en total \$12. ¿Cuántos chocolates y malvaviscos compró?

12) Juanito y Rodolfo comentan:
Juanito: "Si yo te tomo 2 canicas, tendré tantas como tú"
Rodolfo: "Sí, pero si yo te tomo 4, entonces tendré 4 veces más que tú". ¿Cuántas canicas tienen cada uno?

13) En una bolsa hay 20 billetes con un total de \$760. Los billetes son de \$20 y \$50. ¿Cuántos billetes hay de cada valor?

14) En la fiesta de un amigo se han repartido entre los 20 asistentes el mismo número de monedas. Como a última hora ha acudido un chico más nos han dado a todos 1 moneda menos y han sobrado 17. ¿Cuántas monedas para repartir se tenía?

15) Para cercar un terreno rectangular se necesitan de 316 metros de malla. Calcular sus dimensiones sabiendo que mide 52 metros más de largo que de ancho.

16) Calcula las dimensiones de un rectángulo tal que si se aumenta la base en 3 centímetros y se disminuye la altura en otros 3 su área disminuye en 15 cm^2; pero si la base disminuye en 3 cm y la altura aumenta en 4 cm, su área aumenta en 1 cm^2 en comparación al rectángulo original.

17) Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 24º mayor que el otro. ¿Cuánto mide cada ángulo del triángulo?

18) La altura de un trapecio isósceles mide 4 cm, la suma de las bases es de 14 cm, y los lados oblicuos miden 5 cm. Averigua las bases del trapecio.

19) En un pueblo, hace muchos años, se utilizaba, como unidades de medida de peso, la libra y la onza. Recientemente se encontró un documento del siglo pasado en el que aparecían los siguientes pasajes: "*... pesando 3 libras y 4 onzas, es decir 1495 gramos...*" y "*... resultando 2 libras y 8 onzas, cuando el extranjero preguntó por el peso en gramos le contestaron 1150 gramos*". ¿Sabrías calcular el valor, en gramos, de la libra y la onza de ese tiempo?

20) En el mismo documento antes mencionado nos encontramos el siguiente pasaje: "*... las dimensiones del mural eran 5 toesas y 3 pies de largo y 3 toesas y 5 pies de alto...*" Como ese mural rectangular se conserva en la actualidad se ha medido con la máxima precisión posible: 4.82 m de largo por 2.988 m de alto. Con estos datos ¿puedes decir cuánto mide una toesa y un pie en metros?

21) Un reloj señala las nueve en punto. Por tanto las manecillas del reloj forman un ángulo recto. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que formen de nuevo un ángulo recto?

22) Un reloj marca las doce horas. ¿A qué hora la manecilla que marca los minutos se encontrará otra vez con la manecilla que marca la hora?

23) Un bote emplea 5 horas en recorrer 24 km río abajo y en regresar. En recorrer 3 km río abajo emplea el mismo tiempo que en recorrer 2 km río arriba. Encuentra el tiempo empleado en ir y el empleado en volver.

24) Pedro le dice a Luis: dame la mitad de lo que tienes, y \$60 más y tendré 4 veces lo que tú, y Luis le contesta: dame \$80 y tendré \$310 más que tú. ¿Cuánto tiene cada uno?

25) Dos trenes parten al mismo tiempo de estaciones que distan 360 Km. y se encuentran al cabo de cuatro horas. Si hubieran viajado siete horas en la misma dirección estarían separados 192 Km. ¿Cuáles son sus velocidades?

26) Entre cinco escuelas se han repartido 100 libros. A las dos primeras les han entregado 52 libros en total, a la 2ª y 3ª le han entregado 43, a la 3ª y a la 4ª un total de 34 libros y entre la 4ª y la 5ª escuela han recibido 30 libros. Intenta averiguar con los datos anteriores el número de libros recibidos por cada una de las escuelas.

A U T O E V A L U A C I O N Unidad 4

Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos básicos necesarios para aprobar esta unidad. Para hacer esta evaluación, es necesario que la resuelvas sin consultar algún texto durante la solución.

Esperamos que esta autoevaluación la termines en 1½ hora como máximo.

ENCONTRAR LAS SOLUCIONES DE LOS SIGUIENTES SISTEMAS DE ECUACIONES, por el método que más se te facilite:

1) $2x + y - 2 = 0$
$x - 3y + 5 = 0$

2) $5x = 4y - 2$
$5y + 1 = x$

3) Por el método de graficación, encuentra la solución del sistema:

$7x = y - 2$
$2x - 13 = 3y$

4) En una librería han vendido 20 libros a dos precios distintos: unos a \$80 y otros a \$120 con los que han obtenido \$1920. ¿Cuántos libros han vendido de cada precio?

5) Pedro le dice a Luis: dame la mitad de lo que tienes y \$20 más, y tendré 3 veces lo que te queda, y Luis le contesta: dame \$30 y tendré \$100 más que el doble de lo que te queda. ¿Cuánto tiene cada uno?

6) Dos trenes parten al mismo tiempo de estaciones que distan 360 Km. y se encuentran al cabo de cuatro horas. Si hubieran viajado siete horas en la misma dirección estarían separados 192 Km. ¿Cuáles son sus velocidades?

ESCALA:
Para considerar si has adquirido los aprendizajes de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente todos los ejercicios.
Si resuelves bien 3 o menos, tienes que volver a estudiar con mayor conciencia esta unidad, y hacer todos los ejercicios propuestos en esta guía complementando con los del Banco de Reactivos.
Si contestas bien 4 ejercicios has logrado aprender sólo los conocimientos básicos, pero si resolviste 5 o 6 vas avanzando bien en tu estudio y estás listo para continuar con la unidad 5.